

УДК 551.492

СХОДИМОСТЬ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**Гетман В.А., Гладкий И.И., Ефимик С.В., Махнист Л.П.***УО «Брестский государственный технический университет», г.Брест*

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(\infty) = 0, \quad \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) при решении различных прикладных задач, например в [2], интегрировалось численными методами. Приведем решение этого уравнения [3].

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \frac{df}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1$, с начальным условием $f(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$.

Решение последнего уравнения будем отыскивать в виде $f(\xi) = u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f'(\xi) = u'(\xi)v(\xi) + u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение $u'v + uv' - \xi uv = -1$ или $u'v + u(v' - \xi v) = -1$ (*).

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v' - \xi v = 0$. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{d\xi} = \xi v$, решением которого, очевидно, является $v = 0$, получим $\frac{dv}{v} = \xi d\xi$.

Интегрируя последнее уравнение, имеем $\int \frac{dv}{v} = \int \xi d\xi + C_2$. Откуда $\ln|v| = \frac{\xi^2}{2} + \ln C_1$

или $v = \pm C_1 e^{\frac{\xi^2}{2}}$. Следовательно, $v = C e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v' - \xi v = 0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v = e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C = 1$. Подставляя его в уравнение (*), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}} = -1$ или $u' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u = -\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C$.

Следовательно, $f(\xi) = u(\xi)v(\xi) = (-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или

$f(\xi) = (C - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1.$$

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ и, учитывая начальное условие $f(\xi)|_{\xi=-\infty} = 0$, имеем $f(\xi) = (\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt) e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

$$\text{Действительно, } f(\xi)|_{\xi=-\infty} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt) e^{\frac{\xi^2}{2}} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}$$

и, учитывая $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$, получаем, что последний предел имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Тогда, используя правило Лопиталя, имеем

$$f(\xi)|_{\xi=-\infty} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)'}{\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right)'} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{0 - e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot (-\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\xi} = 0.$$

Таким образом $f(\xi) = (\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или, учитывая $\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
 $f(\xi) = \left(\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}} = \left(\sqrt{2\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}} =$
 $= \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение дифференциального уравнения $\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1$,
удовлетворяющее начальному условию $f(\xi)|_{\xi=-\infty} = 0$.

Используя разложение функции e^z в ряд Тейлора $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$,
имеем

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = 1 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{2^2 2!} + \frac{\xi^6}{2^3 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и}$$

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 2!} - \frac{t^6}{2^3 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

$$\text{Тогда } \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{\xi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \Big|_0^{\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}.$$

Следовательно, решение $f(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ можно представить в виде

$$f(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right) \text{ или}$$

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right).$$

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^k k! (2k+1) 2^{n-k} (n-k)!} \right) \xi^{2n+1} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1) (n-k)!} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{(2k+1) n!} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{(2k+1)} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Докажем, что $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Используя бином Ньютона, $(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k}$ и интегрируя, имеем

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k x^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}.$$

Заметим, что с другой стороны

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{m+1} dx^{m+1} = \frac{x^{m+1} (1-x^2)^n}{m+1} \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x^2)^n = 2n \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{m+1} (1-x^2)^{n-1} dx = \frac{2n}{m+1} I_{m+2,n-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_{m,n} = \frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^n (m+2k-1)} I_{m+2n,0} \text{ и } I_{0,n} = \frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^n (2k-1)} I_{2n,0} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n,0}.$$

Учитывая, что $I_{2n,0} = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1}$, имеем $I_{0,n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n,0} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ и

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{0,n} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \text{ соотношением:}$$

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t, x = \sqrt{t} \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^n dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $B(p, q)$ и гамма-функции $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$

– интегралы Эйлера первого и второго рода, получим

$$\begin{aligned} I_{0,n} &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)n!}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}+n+1-j\right)} = \\ &= \frac{2^n n!}{2^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}+n+1-j\right)} = \frac{(2n)!!}{\prod_{j=1}^{n+1}(1+2n+2-2j)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

$$\text{Так как } \frac{d\theta_1}{d\xi} = f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \int \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!} \right) d\xi = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!! (2n+2)} + C - \end{aligned}$$

$$\text{решение уравнения } \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1.$$

Учитывая, начальное условие, $\theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \quad (2)$$

$$\text{где } S_1(\xi) = A(\xi) - B(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!! (2n+2)}.$$

$$\text{Общие члены этих рядов } a_n = a_n(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)} \text{ и } b_n = b_n(\xi) = \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!! (2n+2)}$$

$$\text{удовлетворяют рекуррентным соотношениям } a_{n+1} = \frac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)} a_n, \quad a_0 = \xi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ и}$$

$$b_{n+1} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} b_n, \quad b_0 = \frac{\xi^2}{2}. \text{ Эти соотношения можно использовать для вы-}$$

числения значений частичных сумм рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$.

Отметим свойства рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$:

1. $a_n > 0$, $b_n > 0$, для любого $\xi > 0$.
2. $A(-\xi) = -A(\xi)$, $B(-\xi) = B(\xi)$
3. $S_1(\xi) + S_1(-\xi) = -2B(\xi)$, $S_1(\xi) - S_1(-\xi) = 2A(\xi)$.

Исследуем на сходимость ряды $A(\xi)$, $B(\xi)$. Используя признак Д'Аламбера, имеем

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1, \quad \text{если} \quad n > \frac{\xi^2}{2q} - 1,5 \quad \text{и}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1, \quad \text{если} \quad n > \frac{\xi^2}{2q} - 2.$$

Следовательно, для любого числа q , $0 < q < 1$, существует натуральное число, например, $n_0 = \left\lceil \frac{\xi^2}{2q} \right\rceil$, такое, что для любого $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} < q. \quad \text{Тогда остатки рядов } A(\xi), B(\xi) \text{ удовлетворяют неравенствам:}$$

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right| \leq \frac{|a_n|}{1-q}, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq \frac{b_n}{1-q} \quad \text{и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость}$$

бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q .

Таким образом, значения рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n -ые частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k$, если выполняются неравенства:

$$|a_n| \leq \varepsilon(1-q), \quad b_n \leq \varepsilon(1-q), \quad \text{и} \quad n \geq n_0 = \left\lceil \frac{\xi^2}{2q} \right\rceil. \quad (3)$$

Так, например, для $q = 0,5$ неравенства принимают вид: $|a_n| \leq \varepsilon$, $b_n \leq \varepsilon$, и $n \geq n_0 = \lceil \xi^2 \rceil$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_1(\xi)$, $S_1(\xi_*)$ обеспечивается вычислением n -ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$ при выполнении условий (3), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$.

Учитывая следствие формулы Стирлинга: $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n + \frac{1}{12n}}$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n+1)!!(2n+2)}{|\xi|(2n)!!(2n+1)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n)!(2n+2)}{|\xi|2^{2n}(n!)^2} > \\ &> \frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|\sqrt{2}} \frac{(2n+2)(2n)^{2n} e^{-2n} 2\sqrt{\pi n}}{2^{2n} n^{2n} 2\pi n e^{-2n + \frac{1}{6n}}} = \frac{(n+1)\sqrt{2n}}{n e^{\frac{1}{6n}} |\xi|} > \frac{\sqrt{2n}}{e^{\frac{1}{6}} |\xi|} \geq 1, \end{aligned}$$

если $n \geq \frac{\sqrt[3]{e}\xi^2}{2}$. Следовательно, для $n \geq n_0 = \lceil \xi^2 \rceil$ выполняется неравенство $|a_n| \geq b_n$. Это неравенство позволяет упростить проверку условий (3) при вычислении n -ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$ и $\sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$.

Результаты вычисления значений функции $\theta_1(\xi)$ с использованием соотношений (2) и условий (3) приведены в табл. 1 и на рис.1.

Таблица 1

ξ_*	ξ					
	0	1	2	3	4	5
-1	2,09	3,00	3,52	3,88	4,14	4,35
0		0,90	1,43	1,78	2,05	2,26
1			0,52	0,88	1,15	1,36
2				0,36	0,62	0,84

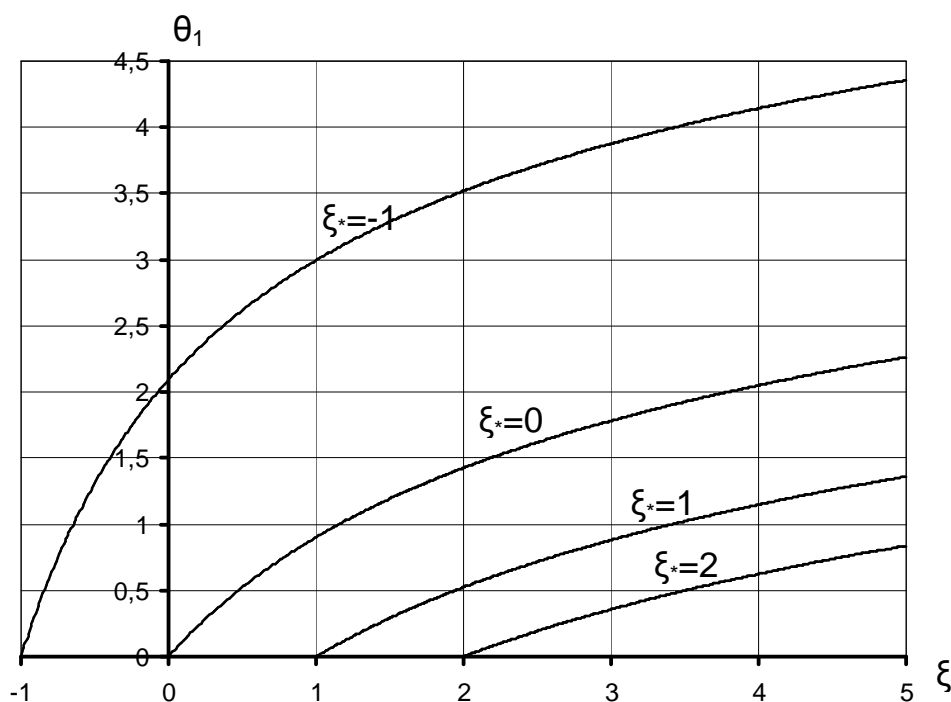


Рисунок 1

Литература

1. Найденов В.И., Швейкина В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Том 29, № 1. – М., 2002. – С. 62 – 67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2006. – № 5 – С. 56-60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5 – С. 83-87.